

Fonctionnement thermique du régénérateur SPRATL

Voir nomenclature page 16

Le régénérateur (RGN) est fondamental pour recycler au sein du dispositif(1) les échanges thermiques des phases isochores et tendre ainsi vers la limite de Carnot. Dans le dispositif(1), les régénérateurs assurent des écoulements unidirectionnels de fluide (à l'intérieur d'un tuyau donné) entre les machines chaudes (2C,2C1,2C2...) et les machines froides (2F,2F1,2F2...), ce qui permet de constituer des échangeurs thermiques avec des tuyaux, enroulés de préférence en hélicoïde. La moitié de ces tuyaux conduisent constamment du fluide de (2F,2F1,2F2...) vers (2C,2C1,2C2...), et l'autre moitié dans le sens inverse : de (2C,2C1,2C2...) vers (2F,2F1,2F2...).

De plus, ils sont mutuellement en contact thermique et constituent un échangeur de températures quasi-parfait. Comme cela a déjà été évoqué, il est possible de jumeler certains couples de tuyaux en un seul : l'écoulement devient alors unidirectionnel et *continu*. En effet, les flux d'une catégorie de chambres (grandes : GC) (petites : PC) d'une machine (2, 2F,2F1,2F2, 2C,2C1,2C2...) sont intermittents, identiques et en opposition de phase ; si bien qu'en connectant un seul tuyau sur les 2 sorties de chambres identiques d'une même machine, le flux, en plus d'être unidirectionnel, devient continu.

Les options de connexion et d'assemblage d'un nombre N pair de machines sont décrites aux figures 3A à 3Q. L'aspect thermique du régénérateur va être ici entièrement développé en s'appuyant sur les figures 5A, 5B et 5C et les équations de la diffusion thermique.

Tel qu'illustré à la figure 5A de manière schématique pour un dispositif(1) à 2 machines(2F,2C), l'une froide(2F), l'autre chaude(2C) et un régénérateur(RGN), la circulation de fluide se fait à travers 2 conduites(A,B), lesquelles assurent dans le cas d'un *moteur* de Stirling :

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

- une circulation continue des petites chambres froides(PCF) de la machine(2F) vers les petites chambres chaudes(PCC) de la machine(2C) ; conduite A,
- une circulation continue des grandes chambres chaudes(GCC) de la machine(2C) vers les grandes chambres froides(GCF) de la machine(2F) ; conduite B.

Le régénérateur(RGN), constitué de conduites enroulées de préférence en hélicoïdes, est assimilé à deux conduites rectilignes(A,B) de longueur ℓ correspondant à la longueur de l'hélicoïde « déroulée ». On adjoint pour les calculs un repère orthonormé(O,x,y,z). Tel qu'illustré à la figure 5C, la section des deux conduites (A,B) est supposée équivalente, de dimensions a et b le long de Oy et Oz. La conduite(A) est séparée de la conduite(B) par une épaisseur e de métal, de dimensions b et ℓ le long de Oz et Ox.

Pour un récepteur de Stirling, les circulations sont en sens inverse. Dans tous les cas, la machine froide(2F) est à la température T_f et la machine chaude(2C) est à la température T_c . Les conditions imposées aux limites des conduites pour le fluide s'y écoulant sont donc :

- dans le cas du moteur : $T_A(x=0)=T_f$ et $T_B(x=\ell)=T_c$
- dans le cas du récepteur : $T_A(x=\ell)=T_c$ et $T_B(x=0)=T_f$

Dans toute la suite, les calculs seront menés dans le cas d'un dispositif(1) moteur de Stirling. Pour cela, des paramètres supplémentaires doivent être introduits :

- conductivités thermiques (supposées identiques dans les 2 conduites) :
 - o du fluide λ
 - o du métal λ_m
- masses volumiques du fluide :
 - o ρ_A dans la conduite(A)
 - o ρ_B dans la conduite(B)
- capacités thermiques massiques du fluide :

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

- o c_A dans la conduite(A)
- o c_B dans la conduite(B)
- énergies internes massiques du fluide :
 - o $u_A(x)$ dans la conduite(A)
 - o $u_B(x)$ dans la conduite(B)
- températures du fluide (supposées homogènes sur une section(Oyz) dans une conduite donnée) :
 - o $T_A(x)$ dans la conduite(A)
 - o $T_B(x)$ dans la conduite(B)
- vitesses du fluide (supposées homogènes sur une section(Oyz) et dirigées le long de Ox) :
 - o $v_A \vec{x}$ dans la conduite(A)
 - o $-v_B \vec{x}$ dans la conduite(B)
- les volumes maximum des chambres
 - o V_{\min} pour les petites chambres
 - o V_{\max} pour les grandes chambres
- la vitesse de rotation des pistons annulaires : Ω
- le nombre de cycles par tour de piston : $n_{\text{cycles/tour}} = 3N$
- la pression à l'étape 1 du cycle de Stirling : P_1

Hypothèse de stationnarité des écoulements

Au bout de quelques dizaines de cycles, les grandeurs physiques deviennent indépendantes du temps et ne dépendent que de l'espace : régime stationnaire. Donc :

- il ne peut pas y avoir accumulation ou raréfaction de fluide dans une portion de conduite donnée (sinon, la masse totale de fluide qu'elle contient ne serait pas constante) : le débit massique de fluide à travers chaque conduite se conserve, et c'est aussi le même entre les conduites (A) et (B) :

$$\forall x, \rho_A v_A = \rho_B v_B = \rho_{AB} v_{AB} = D_m$$

avec D_m le débit massique de fluide dans le dispositif(1)

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

soit aussi $\forall x, \rho v = \rho_B v_B = \rho_A v_A = \frac{D_m}{ab}$

- les températures, pressions et masses volumiques dans les conduites(A,B) ne dépendent pas du temps.
- les machines(2F,2C) aspirent et refoulent *constamment* le long d'une conduite *exactement* le même volume. L'évolution d'une particule de fluide dans une conduite est donc isochore et sa masse volumique reste constante en régime stationnaire :

$$* \forall x, \rho(x) = \rho_A \text{ pour la conduite(A),}$$

$$* \forall x, \rho(x) = \rho_B \text{ pour la conduite(B).}$$

Alors, comme le débit massique est constant, le débit volumique se conserve, et donc la vitesse aussi :

$$* \forall x, \rho_A ab v = \rho_A ab v_A \Rightarrow v = v_A \text{ pour la conduite(A)}$$

$$* \forall x, \rho_B ab v = \rho_B ab v_B \Rightarrow v = v_B \text{ pour la conduite(B)}$$

En revanche, ces vitesses diffèrent d'une conduite à l'autre à cause de la différence des volumes transférés par les petites et grandes chambres *sur un temps égal*. Il faut donc, à section égale des deux conduites(A,B), que la vitesse dans la conduite(B) soit supérieure du facteur $\beta = \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$ à la vitesse dans la conduite(A) :

$$v_B = \beta v_A$$

Aspect thermodynamique du gaz parfait

Un gaz parfait de masse molaire M possède une capacité thermique massique constante. Ainsi, avec R la constante des gaz parfaits, $c_A = c_B = c$ avec :

$$* c = \frac{3R}{2M} \text{ pour un gaz monoatomique comme l'Helium, et,}$$

$$* c = \frac{5R}{2M} \text{ pour un gaz diatomique comme l'air.}$$

Par ailleurs, l'équation d'état $PV = nRT$, avec $n = m/M$, où m est la masse des n moles de gaz, se réécrit :

$$\rho = \frac{MP}{RT}$$

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

Comme le long de la conduite(A) : $\forall x, v=v_A$ et $\rho v=\rho_A v_A$,

et le long de la conduite(B) : $\forall x, v=v_B$ et $\rho v=\rho_B v_B$,

les masses volumiques ne dépendent pas de x :

$$* \text{ Pour la conduite(A) : } \forall x, \rho=\rho_A=\frac{MP_2}{RT_f}=\frac{M}{RT_f}\beta P_1=\frac{MP_A(x)}{RT_A(x)}$$

$$* \text{ Pour la conduite(B) : } \forall x, \rho=\rho_B=\frac{MP_4}{RT_c}=\frac{M\alpha P_1}{RT_c}=\frac{MP_1}{RT_f}=\frac{\rho_A}{\beta}=\frac{MP_B(x)}{RT_B(x)}$$

Compte tenu de ce qui précède, la connaissance du champ des températures dans les conduites(A,B) permet d'y déterminer toutes les grandeurs thermodynamiques du fluide.

Principaux flux thermiques dans le régénérateur

La loi de la diffusion thermique de Fourier exprime le courant surfacique local de chaleur par :

$$* \vec{j}_f = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{z} \right) \text{ dans le fluide, en J/s/m}^2 \text{ ou W/m}^2$$

$$* \vec{j}_m = -\lambda_m \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{z} \right) \text{ dans le métal des conduites, et}$$

$$* \vec{j}_{éch} = -\lambda_m \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{z} \right) \text{ dans la zone d'échange en métal.}$$

Typiquement, la conductivité vaut $\lambda_m=50 \text{ W/m}^2/\text{K}$ pour l'acier, et $\lambda_m=0,026 \text{ W/m}^2/\text{K}$ pour l'air. En dehors de la zone d'échange d'épaisseur e , l'acier homogénéise sa température 2000 fois plus vite que l'air. Les conduites(A) et(B) sont donc approximativement de température homogène sur une section $(0,y,z)$:

$$* T_A(x) \text{ pour la conduite(A),}$$

$$* T_B(x) \text{ pour la conduite(B).}$$

Ceci impose à la température d'une section de fluide d'être presque homogène, et sensiblement à la température locale de la conduite. Il y a donc les ordres de grandeur suivants pour les courants thermiques surfaciques :

$$* \text{ Dans le fluide : } j_{fx} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \neq 0 \quad j_{fy} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \approx 0 \quad j_{fz} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$$

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

* Dans le métal des conduites :

$$j_{mx} = -\lambda_m \frac{\partial T}{\partial x} \neq 0 \quad j_{my} = -\lambda_m \frac{\partial T}{\partial y} \approx 0 \quad j_{mz} = -\lambda_m \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$$

* Dans le métal de la zone d'échange des conduites :

$$j_{echx} = -\lambda_m \frac{\partial T}{\partial x} \neq 0 \quad j_{echy} = -\lambda_m \frac{\partial T}{\partial y} \neq 0 \quad j_{echz} = -\lambda_m \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$$

Avec, pour les courants thermiques non négligeables :

$$|j_{fx}| \approx \lambda \frac{T_c - T_f}{\ell} \quad ; \quad |j_{mx}| \approx \lambda_m \frac{T_c - T_f}{\ell} \quad ; \quad |j_{echx}| = \lambda_m \frac{T_c - T_f}{\ell} \quad ; \quad |j_{echy}| = \lambda_m \frac{|T_B - T_A|}{e}$$

Ces courants thermiques non négligeables induisent des flux le long de x qui sont des flux parasites non souhaitables :

$$* \quad \phi_{fx} \approx |j_{fx}| ab \approx ab \lambda \frac{T_c - T_f}{\ell} \quad \text{pour chaque conduite,}$$

$$* \quad \phi_{mx} \approx |j_{mx}| 2e(a+b) \approx 2e(a+b) \lambda_m \frac{T_c - T_f}{\ell} \quad \text{pour chaque conduite,}$$

$$* \quad \phi_{echx} = |j_{echx}| eb = \lambda_m eb \frac{T_c - T_f}{\ell} \quad \text{pour la zone d'échange.}$$

Le flux utile et prépondérant est, pour une longueur dx de zone d'échange :

$$* \quad d\phi_{echy} = |j_{echy}| b dx = \lambda_m b dx \frac{|T_B(x) - T_A(x)|}{e}$$

En effet, avec les ordres de grandeur typiques :

- en dimensions : $\ell = 70 \text{ cm}$, $e = 2 \text{ mm}$, $dx = 5 \text{ mm}$, $a = 10 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$

- en températures : $T_c - T_f \approx 1000 \text{ K}$ et $T_B - T_A \approx 7 \text{ K}$

On obtient les ordres de grandeur suivants :

$$* \quad \phi_{mx} \approx 2e(a+b) \lambda_m \frac{T_c - T_f}{\ell} = 8,6 \text{ W} \quad \text{pour chaque conduite}$$

$$* \quad \phi_{fx} \approx ab \lambda \frac{T_c - T_f}{\ell} = 7,5 \text{ mW} \quad \text{pour chaque conduite}$$

$$* \quad \phi_{echx} = \lambda_m eb \frac{T_c - T_f}{\ell} \approx 2,9 \text{ W} \quad \text{pour la zone d'échange}$$

$$* \quad d\phi_{echy} \approx \lambda_m b dx \frac{|T_B(x) - T_A(x)|}{e} = 16,75 \text{ W} \quad , \quad \text{soit } 2346 \text{ W} \quad \text{pour } 70 \text{ cm.}$$

On remarque au passage que le régénérateur proposé induit de très faibles fuites thermiques directes entre une machine chaude(2C) et

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

une machine froide(2F), de l'ordre de la dizaine de Watt, alors que la puissance thermique de la machine peut aller jusqu'aux milliers de Watt.

Equations différentielles des températures

Tel qu'illustré à la figure 5B, une particule de fluide, de section ab , de longueur dx , s'écoule le long de Ox à la vitesse v : entre 2 dates t et $t+dt$, la particule se translate d'une distance $v dt$ et la variation de son énergie interne vaut $dU = U_{t+dt} - U_t$ avec :

- $U_{t+dt} = U(x+v dt)$, où $U(x+v dt) = ab dx \rho c T(x+v dt)$
- $U_t = U(x)$, où $U(x) = ab dx \rho c T(x)$

$$\text{Ainsi } dU = \rho cab dx \frac{\partial T}{\partial x} v dt$$

Par ailleurs, l'équation locale de non conservation de la chaleur pour cette particule s'écrit $\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = \sigma$ où :

- u désigne l'énergie interne volumique,
- div est l'opérateur divergence,
- σ est l'apport algébrique volumique local de chaleur.

Pour la particule étudiée, l'équation devient :

$$ab dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j_{fx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{fy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{fz}}{\partial z} \right) = \sigma ab dx$$

Elle se simplifie compte tenu des ordres de grandeur des courants thermiques en :

$$ab dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j_{fx}}{\partial x} \right) = j_{echy} b dx \text{ soit :}$$

$$ab dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = j_{echy} b dx - ab dx \frac{\partial j_{fx}}{\partial x} \text{ et encore,}$$

$$dU = \left(\lambda_m b dx \frac{|T_B(x) - T_A(x)|}{e} - ab dx \frac{\partial \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} \right) dt$$

En égalisant les deux expressions de dU précédentes, on a :

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

$$\rho c a b \, dx \frac{\partial T}{\partial x} v \, dt = dU = \left(\lambda_m \frac{|T_B(x) - T_A(x)|}{e} + \lambda a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dt \, b \, dx$$

Soit :

$$* \, a \rho_A c_A v_A \frac{\partial T_A}{\partial x} = \lambda_m \frac{T_B - T_A}{e} + \lambda a \frac{\partial^2 T_A}{\partial x^2} \text{ pour la conduite (A), et,}$$

$$* \, a \rho_B c_B (-v_B) \frac{\partial T_B}{\partial x} = \lambda_m \frac{T_A - T_B}{e} + \lambda a \frac{\partial^2 T_B}{\partial x^2} \text{ pour la conduite (B).}$$

En réintroduisant le débit massique de fluide $D_m = \rho_A v_A a b = \rho_B v_B a b$, et comme $c_A = c_B = c$, il reste :

$$* \, D_m \frac{c}{b} \frac{\partial T_A}{\partial x} = \lambda_m \frac{T_B - T_A}{e} + \lambda a \frac{\partial^2 T_A}{\partial x^2} \text{ pour la conduite (A), et,}$$

$$* \, -D_m \frac{c}{b} \frac{\partial T_B}{\partial x} = \lambda_m \frac{T_A - T_B}{e} + \lambda a \frac{\partial^2 T_B}{\partial x^2} \text{ pour la conduite (B).}$$

Résolution des équations différentielles

On aboutit à un système d'équations différentielles linéaires couplées du second ordre. Sa résolution exacte est possible, mais complexe. Ces équations peuvent se simplifier en un système couplé du premier ordre. En effet, si l'on compare les termes dérivés en ordre de grandeur :

$$\left| a \rho c v \frac{\partial T}{\partial x} \right| \approx a \rho c v \frac{T_c - T_f}{\ell} \quad \text{et} \quad \left| \lambda a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right| \approx \lambda a \frac{T_c - T_f}{\ell^2}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{\left| \lambda a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|}{\left| a \rho c v \frac{\partial T}{\partial x} \right|} \approx \frac{\lambda a \frac{T_c - T_f}{\ell^2}}{a \rho c v \frac{T_c - T_f}{\ell}} = \frac{\lambda}{\rho c v \ell} = \frac{D_{th}}{v \ell}$$

Or $\frac{D_{th}}{v \ell} \ll 1$ dans les conditions usuelles. En effet, la diffusivité

thermique $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$ du gaz est typiquement de l'ordre de $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; la

longueur déroulée ℓ du régénérateur de 0,7 m et la vitesse du fluide d'au moins $v = 1 \text{ m/s}$. Ainsi, le terme dérivé d'ordre deux, représentant les effets thermiques *diffusifs*, est au moins 100 000 fois inférieur à celui d'ordre un, représentant les effets

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

convectifs (liés à la vitesse v d'écoulement). On retrouve bien ici l'importance d'utiliser la *convection* dans le but d'un *échange thermique intense*. Les équations deviennent donc avec une excellente approximation :

$$* a\rho_A c v_A \frac{\partial T_A}{\partial x} = \lambda_m \frac{T_B - T_A}{e} \text{ pour la conduite (A), et,}$$

$$* a\rho_B c (-v_B) \frac{\partial T_B}{\partial x} = \lambda_m \frac{T_A - T_B}{e} \text{ pour la conduite (B).}$$

Et en utilisant le débit massique de fluide D_m :

$$* D_m \frac{c}{b} \frac{\partial T_A}{\partial x} = \lambda_m \frac{T_B - T_A}{e} \text{ pour la conduite (A), et,}$$

$$* -D_m \frac{c}{b} \frac{\partial T_B}{\partial x} = \lambda_m \frac{T_A - T_B}{e} \text{ pour la conduite (B).}$$

La résolution de ce système donne avec les conditions aux limites $T_A(x=0)=T_f$ et $T_B(x=\ell)=T_c$:

$$* T_A(x) = \left[\frac{\lambda_m b (\lambda_m b \ell T_f + c D_m e T_c)}{c D_m e (c D_m e + \lambda_m b \ell)} - \frac{\lambda_m b T_f}{c D_m e} \right] x + T_f \text{ et,}$$

$$* T_B(x) = \frac{\lambda_m b \ell T_f + c D_m e T_c}{c D_m e + \lambda_m b \ell} + \left[\frac{\lambda_m b (\lambda_m b \ell T_f + c D_m e T_c)}{c D_m e (c D_m e + \lambda_m b \ell)} - \frac{\lambda_m b T_f}{c D_m e} \right] x$$

Les profils de températures croissent donc linéairement avec l'abscisse x . La différence de température $\Delta T = T_B - T_A$, à l'origine de l'échange thermique entre les conduites (A) et (B), et donc de la régénération, se calcule à partir des expressions précédentes et vaut :

$$\Delta T = \frac{(T_c - T_f) c D_m e}{c D_m e + \lambda_m b \ell}$$

Cette grandeur est indépendante de x . On peut définir le rendement du régénérateur, traduisant sa capacité à échanger les températures chaude et froide :

$$\eta_{RGN} = 1 - \frac{\Delta T}{T_c - T_f}$$

$$* \text{ Absence de régénérateur : } \Delta T = T_c - T_f \Rightarrow \eta_{RGN} = 0$$

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

* Régénérateur idéal : $\Delta T = 0 \Rightarrow \eta_{RGN} = 1$

Tout calcul fait, le rendement du régénérateur vaut :

$$\eta_{RGN} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\lambda_m b \ell}{c D_m e}}$$

C'est donc le facteur $F_{RGN} = \frac{\lambda_m b \ell}{c D_m e}$ qui est crucial.

Rendement typique et optimisation du régénérateur

Tel qu'illustré à la figure 5D, le rendement η_{RGN} du régénérateur franchit très rapidement les 80% pour des facteurs F_{RGN} supérieurs à 5.

Tel qu'illustré aux figures 5E, 5F et 5G pour des facteurs de régénération respectifs $F_{RGN} = 1.8$, 3.75 et 19, l'écart ΔT de température entre les conduites (A) et (B) est de plus en plus faible ; le rendement du régénérateur prend les valeurs croissantes respectives 64, 79 et 95%.

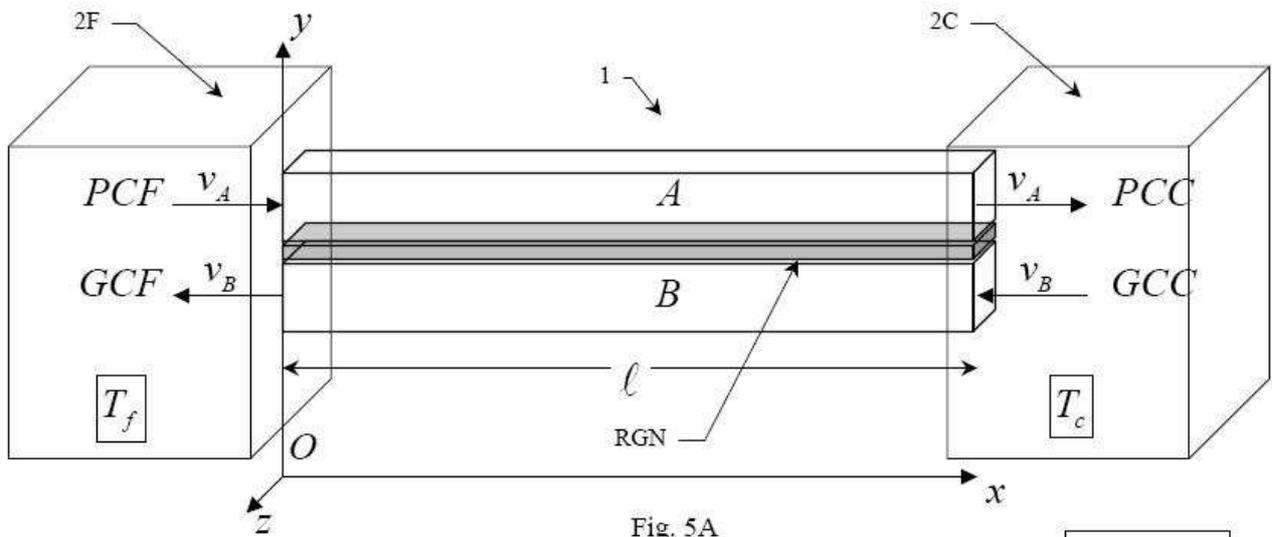


Fig. 5A

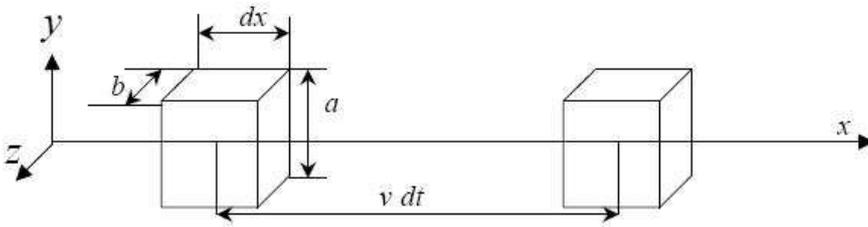


Fig. 5B

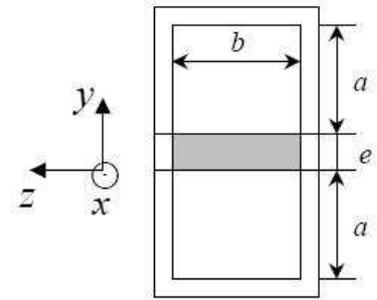


Fig. 5C

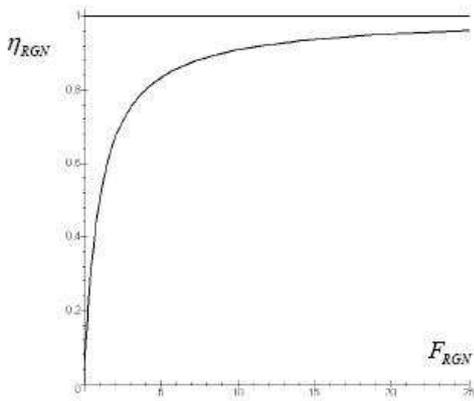


Fig. 5D

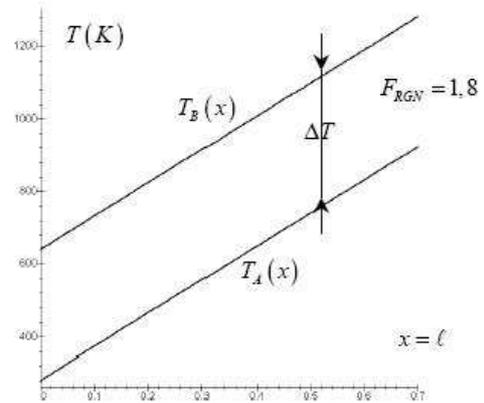


Fig. 5E

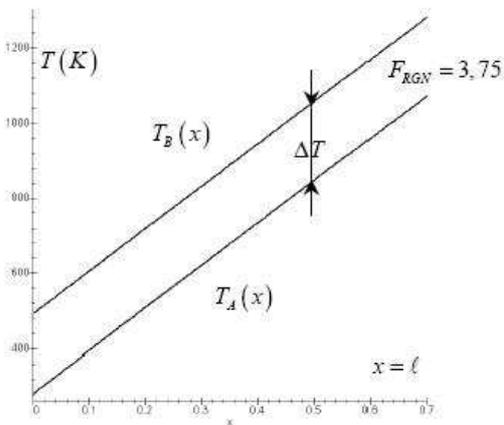


Fig. 5F

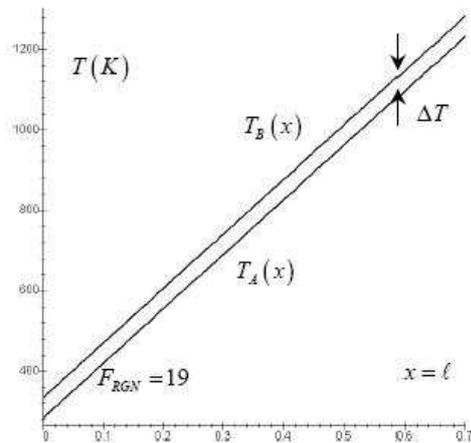


Fig. 5G

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

On peut obtenir des rendements de 99.5% avec des matériaux et dimensions usuels en prenant les paramètres suivants :

- en dimensions : $\ell = 70 \text{ cm}$, $e = 2 \text{ mm}$, $a = 10 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$
- en conductivité : $\lambda_m = \lambda_{acier} = 50 \text{ W/K/m}$, $\lambda = \lambda_{air} = 0.026 \text{ W/K/m}$
- en températures : $T_c - T_f \approx 1000 \text{ K}$, $T_c = 1283 \text{ K}$, $T_f = 283 \text{ K}$
- thermodynamiques : $R = 8.314 \text{ J/K/mol}$, $M = 29 \text{ g/mol}$ $c = \frac{5R}{2M}$
- en débit : $D_m = 3.3 \text{ g/s} \Leftrightarrow 0.7 \text{ L/s}$ à l'étape n°1.

Aboutissant à $F_{RGN} \approx 148$ et $T_B - T_A \approx 6.7 \text{ K}$ (99.5% de régénération).

De façon plus générale, l'optimisation du régénérateur passe par la

maximisation du facteur : $F_{RGN} = \frac{\lambda_m b \ell}{c D_m e}$

C'est à dire :

- augmenter la conductivité du métal, (avec des contraintes de températures à respecter selon la source chaude),
- augmenter la largeur de la surface d'échange métallique (au détriment de la compacité),
- augmenter la longueur du régénérateur : il suffit pour cela d'augmenter le nombre de tours de l'hélicoïde, et/ou de l'enrouler sur plusieurs rayons à la manière d'une bobine (au détriment de la compacité) ; ordre de grandeur : avec un rayon moyen de 4 cm, 3 tours, correspondent à 70 cm de longueur déroulée,
- diminuer la capacité thermique massique c : utiliser des gaz peu légers et monoatomiques ; de préférence l'hélium, le néon ou l'argon (mais coût supérieur),
- diminuer le débit massique (mais cela limite la puissance de la machine),
- diminuer l'épaisseur de la surface d'échange (mais elle doit pouvoir encaisser sans rompre une pression différentielle de quelques Bars sur une largeur b).

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

Il faut aussi, en relation avec le débit nominal, maintenir une section des tuyaux suffisamment grande pour rendre négligeables les pertes de charges par laminage de fluide, de préférence gazeux. La section de tuyau peut être suffisante sans difficulté en augmentant la taille du régénérateur.

Enfin, pour que le régénérateur ne perde pas d'énergie par rayonnement thermique, il est préférable de le placer à l'intérieur d'un manchon cylindrique (ISO) à faces réfléchissantes (blocage des échanges radiatifs) et possédant au moins une cavité cylindrique, idéalement vide (blocage de la conduction thermique du régénérateur vers l'extérieur).

Puissance extraite, régulation et rendement

La puissance est proportionnelle à vitesse de rotation Ω (en rad/s) du rotor (ROT) du dispositif(1), à son nombre N de machines(2,2F,2C) et à sa pression nominale de fonctionnement, qui sera égale par convention à P_1 , pression de l'étape n°1 du cycle de Stirling que nous supposerons *moteur*. D'autres paramètres essentiels sont :

- le nombre de cycles de Stirling réalisés par tour (360°) de rotor (ROT) donne 6 cycles par couple de machines, soit :

$$n_{\text{cycle/tour}} = 6 \frac{N}{2} = 3N$$

- la masse m_f de fluide subissant un cycle de Stirling donné : c'est celle du gaz contenu dans une grande chambre (GC) de volume V_{max} , à la pression P_1 et à la température T_f . D'où en appliquant la loi du gaz parfait de masse molaire M :

$$m_f = \frac{MP_1 V_{\text{max}}}{RT_f}$$

- les paramètres adimensionnels caractéristiques du cycle de Stirling choisi :

$$\alpha = \frac{T_c}{T_f} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}$$

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

- le travail w effectué par cette masse de fluide constituée de n moles et par cycle :

$$w = nR(T_c - T_f) \ln \beta = \frac{m_f}{M} R(T_c - T_f) \ln \beta$$

On en déduit :

- le nombre de cycles par seconde : $n_{\text{cycle/s}} = 3N \frac{\Omega}{2\pi}$
- puis la puissance : $P_W = w n_{\text{cycle/s}}$

Tout calcul fait, il reste : $P_W = \frac{3N}{2\pi} \Omega P_1 V_{\text{max}} (\alpha - 1) \ln \beta$

Une autre forme intéressante de la puissance est d'y faire intervenir le débit massique, qui en fonction des paramètres précédents, vaut :

$$D_m = m_f n_{\text{cycle/s}} = \Omega \frac{3NM}{2\pi} \frac{P_1 V_{\text{max}}}{RT_f}$$

Soit finalement : $P_W = D_m \frac{RT_f}{M} (\alpha - 1) \ln \beta$

Quelques ordres de grandeur de puissance :

Un dispositif(1) constitué par 2 machines(2), chacune de dimensions 25 x 20 x 8 cm comporte typiquement un volume de grande chambre $V_{\text{max}} = 0.5 \text{ Litre}$, un taux de compression $\beta \approx 2.5$. Si cette machine travaille à $P_1 = 4 \text{ Bar}$, entre 1283K et 283K (soit $\alpha \approx 4.5$) avec $\Omega = 13 \text{ tr/min}$, elle fournira 865 W, avec un débit massique, $D_m = 3.3 \text{ g/s}$, soit 0,7 L/s de débit volumique au niveau de l'étape 1. Compte tenu d'éventuelles imperfections mécaniques ou thermodynamiques (isothermes), une valeur de 800 W est à retenir.

La régulation de la puissance du dispositif(1) peut se faire par deux voies principales : en vitesse de rotation Ω et en pression P_2 . En général, les génératrices électriques fonctionnent à une fréquence précise. Par ailleurs, la vitesse de rotation doit rester très lente de manière à ce que le fluide soit idéalement en équilibre thermique avec les machines chaudes et froides lorsqu'il s'y trouve. C'est pourquoi la régulation se fait de préférence avec la pression à lente vitesse de rotation : c'est actuellement la méthode la plus utilisée, notamment dans le domaine des « Dish Stirling » solaires.

Le rendement dépend de l'efficacité du régénérateur et s'exprime par :

$$RS = \frac{1}{\frac{1}{RC} + (1 - \eta_{RGN}) \frac{C_v}{nR \ln \beta}} \quad \text{où } RC = 1 - \frac{1}{\alpha_{cor}} \quad \text{et } \eta_{RGN} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\lambda_m b \ell}{c D_m e}}$$

Le facteur α peut être ici corrigé du fait que le fluide, au cours de ses évolutions isothermes, est toujours moins chaud que la source chaude et toujours moins froid que la source froide. On introduit alors ;

$$\alpha_{cor} = \frac{T_c - \theta}{T_f + \theta} \quad \text{avec la différence de température (non désirée)}$$

On a toujours $n = \frac{PV_{max}}{RT_f}$ et en prenant $C_v = \frac{5}{2} nR$, finalement ;

$$RS = \frac{1}{\frac{1}{RC} + (1 - \eta_{RGN}) \frac{5}{2 \ln \beta}}$$

Avec les hypothèses précédentes, et en prenant $\theta = 50K, \eta_{RGN} = 99.5\%$, le rendement thermodynamique *moteur* de Stirling donne 72% soit 64% en prenant 10% de pertes mécaniques, ce qui signifie qu'il faudra apporter environ 1250 W thermiques à la source chaude pour que le dispositif produise 800 W mécaniques.

Nomenclature

- (1) : dispositif « Machine de Stirling à piston annulaire trilobique (machine SPRATL) »
- (2) : machine à piston rotatif annulaire trilobique
- (2F) : machine à piston rotatif annulaire trilobique froide
- (2C) : machine à piston rotatif annulaire trilobique chaude
- (2F1) : machine à piston rotatif trilobique froide n°1
- (2C1) : machine à piston rotatif trilobique chaude n°1
- (2F2)... : machine à piston rotatif trilobique froide n°2...
- (2C2) ... : machine à piston rotatif trilobique chaude n°2...
- (RGN) : régénérateur
- (RGN1) : régénérateur n°1
- (RGN2)... : régénérateur n°2...
- (ROT) : rotor
- (ROTF) : partie froide du rotor
- (ROTC) : partie chaude du rotor
- (PRA) : piston rotatif annulaire
- (PRAF) : piston rotatif annulaire d'une machine froide(2F)
- (PRAC) : piston rotatif annulaire d'une machine chaude(2C)
- (NBA) : noyau bi-arc
- (NBAF) : noyau bi-arc d'une machine froide(2F)
- (NBAC) : noyau bi-arc d'une machine chaude(2C)
- (CAR) : carter
- (CARF) : carter d'une machine froide(2F)
- (CARC) : carter d'une machine chaude(2C)
- (ISO) : manchon d'isolation du régénérateur
- (TRI) : trilobe
- (TRIF) : trilobe d'une machine froide(2F)
- (TRIC) : trilobe d'une machine chaude(2C)
- (PLA) : plaque
- (PLAF): plaque d'une machine froide(2F) solidaire de (TRIF)
- (PLAC): plaque d'une machine chaude(2C) solidaire de (TRIC)
- (CLS) : culasse solidaire de (NBA)
- (CLSF) : culasse solidaire de (NBAF) dans une machine froide(2F)
- (CLSC) : culasse solidaire de (NBAC) dans une machine chaude(2C)
- (ISO1) : tôle d'isolation n°1 du manchon(ISO)
- (ISO2) : tôle d'isolation n°2 du manchon(ISO)

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

(ISO3)... : tôle d'isolation n°3 du manchon(ISO)...

(MAN1) : maneton n°1 solidaire de (PLA)

(MAN2) : maneton n°2 solidaire de (PLA)

(MAN3)... : maneton n°3 solidaire de (PLA)...

(LUM1) : lumière n°1 creusée dans (ROT)

(LUM2) : lumière n°2 creusée dans (ROT)

(LUM3)... : lumière n°3 creusée dans (ROT)...

(CAN) : cannelure usinée dans (ROTF) ou (ROTC)

(SPH) : sphère excentrée solidaire de (ROTF) ou (ROTC)

(PC1) : petite chambre n°1 dans (2)

(PC2) : petite chambre n°2 dans (2)

(PC3) : petite chambre n°3 dans (2)

(GC1) : grande chambre n°1 dans (2)

(GC2) : grande chambre n°2 dans (2)

(GC3) : grande chambre n°3 dans (2)

(PCF) : petite chambre froide

(PCC) : petite chambre chaude

(GCF) : petite chambre froide

(GCC) : grande chambre chaude

(A): tuyau reliant les petites chambres froides et chaudes

(B): tuyau reliant les grandes chambres froides et chaudes

(LUGFHG): lumière d'une grande chambre froide haute et gauche

(LUGFHD): lumière d'une grande chambre froide haute et droite

(LUPFHG): lumière d'une petite chambre froide haute et gauche

(LUPFHD): lumière d'une petite chambre froide haute et droite

(LUPFBG): lumière d'une petite chambre froide basse et gauche

(LUPFBD): lumière d'une petite chambre froide basse et droite

(LUGFBG): lumière d'une grande chambre froide basse et gauche

(LUGFBD): lumière d'une grande chambre froide basse et droite

(LUGCHG): lumière d'une grande chambre chaude haute et gauche

(LUGCHD): lumière d'une grande chambre chaude haute et droite

(LUPCHG): lumière d'une petite chambre chaude haute et gauche

(LUPCHD): lumière d'une petite chambre chaude haute et droite

(LUPCBG): lumière d'une petite chambre chaude basse et gauche

(LUPCBD): lumière d'une petite chambre chaude basse et droite

(LUGCBG): lumière d'une grande chambre chaude basse et gauche

(LUGCBD): lumière d'une grande chambre chaude basse et droite

(SEG1) : segment d'étanchéité n°1

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

(SEG2) : segment d'étanchéité n°2
 (SEG3) : segment d'étanchéité n°3
 (SEG4)... : segment d'étanchéité n°4...
 (AMC1) : ajout de matière circulaire n°1 sur (CAR)
 (AMC2) : ajout de matière circulaire n°2 sur (CAR)
 (EMC1) : enlèvement de matière circulaire n°1 sur (TRI)
 (EMC2) : enlèvement de matière circulaire n°2 sur (TRI)
 (EMC3) : enlèvement de matière circulaire n°3 sur (TRI)

T_f : température absolue (en Kelvin) de la source froide

T_c : température absolue (en Kelvin) de la source chaude

$\alpha = \frac{T_c}{T_f}$: rapport des températures du cycle de Stirling

V_{min} : volume maximum au cours du cycle de Stirling

V_{max} : volume maximum au cours du cycle de Stirling

$\beta = \frac{V_{max}}{V_{min}}$: rapport des volumes extrémaux du cycle de Stirling

RS : rendement moteur de Stirling du dispositif(1)

EF : efficacité frigorifique du dispositif(1)

EC : efficacité calorifique du dispositif(1)

$RC = 1 - \frac{1}{\alpha}$: rendement moteur idéal du cycle de Carnot

$EFC = \frac{1}{\alpha - 1}$: efficacité frigorifique idéale du cycle de Carnot

$ECC = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}}$: efficacité calorifique idéale du cycle de Carnot

1, 2, 3, 4 : étapes thermodynamiques du cycle de Stirling

P, V, T, S : pression, volume, température absolue, entropie

n : nombre de mole du système thermodynamique gazeux

R : constante des gaz parfait = 8,314 J/K/mol

M : masse molaire du gaz

C_v : capacité thermique à volume constant du système

$PV = nRT$: équation d'état d'un gaz parfait

dE : variation infinitésimale d'énergie totale

δQ : transfert thermique infinitésimal

dV : variation infinitésimale de volume

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

P_{ext}	: la pression extérieure appliquée sur le système
$\delta W = -P_{ext} dV$: travail infinitésimal de la pression
δW_u	: transfert infinitésimal des autres travaux
$dE = \delta W + \delta Q + \delta W_u$: premier principe de la thermodynamique
dS	: variation infinitésimale d'entropie
$dE = dU = TdS - PdV$: première identité thermodynamique
Q_{ij}	: transfert thermique de l'étape i vers l'étape j
W_{ij}	: travail de pression de l'étape i vers l'étape j
G_i	: grandeur G à l'étape i du cycle de Stirling
RS	: rendement moteur du dispositif(1)
EF	: efficacité frigorifique du dispositif(1)
EC	: efficacité calorifique du dispositif(1)
DTF	: défaut d'homogénéisation à la température froide
DTC	: défaut d'homogénéisation à la température chaude
$DVMIN$: défaut de volumétrie au volume minimum
$DVMAX$: défaut de volumétrie au volume maximum
N	: nombre de machines (2,2F,2C) du dispositif (1)
(O, x, y, z)	: repère orthonormé d'étude du régénérateur(RGN)
\vec{x}	: vecteur directeur unitaire de Ox
\vec{y}	: vecteur directeur unitaire de Oy
\vec{z}	: vecteur directeur unitaire de Oz
ℓ	: longueur déroulée des tuyaux du régénérateur
a	: dimension le long de Oy d'une conduite de (RGN)
b	: dimension le long de Oz d'une conduite de (RGN)
$(A), (B)$: conduites du régénérateur(RGN)
x	: abscisse dans les conduites le long de Ox
e	: épaisseur le long de Oy séparant (A) et (B)
$T_A(x)$: température en fonction de x du fluide dans(A)
$T_B(x)$: température en fonction de x du fluide dans(B)
λ	: conductivité thermique du fluide
λ_m	: conductivité thermique du matériau des conduites
ρ_A	: masse volumique du fluide dans la conduite(A)

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

- ρ_B : masse volumique du fluide dans la conduite(B)
 $\rho(x)$: masse volumique à l'abscisse x
 c_A : capacité thermique massique du fluide(A)
 c_B : capacité thermique massique du fluide(B)
 c : capacité thermique massique du gaz
 $u_A(x)$: énergie interne massique du fluide(A) fonction de x
 $u_B(x)$: énergie interne massique du fluide(B) fonction de x
 $U(x)$: énergie interne d'une particule à l'abscisse x
 v_A : vitesse d'écoulement du fluide dans la conduite (A)
 v_B : vitesse d'écoulement du fluide dans la conduite (B)
 Ω : vitesse de rotation en rad/s du rotor(ROT)
 $n_{cycles/tour} = 3N$: nombre de cycle de Stirling par tour de rotor
 D_m : débit massique de fluide dans le dispositif(1)
 \vec{j}_f : courant surfacique de chaleur dans le fluide (W/m²)
 j_{fx}, j_{fy}, j_{fz} : courant surfacique dans le fluide sur les axes Ox,Oy,Oz en
(W/m²)
 \vec{j}_m : courant surfacique dans le métal des conduites
 j_{mx}, j_{my}, j_{mz} : courants surfaciques dans le métal des conduites sur
les axes Ox,Oy,Oz
 $\vec{j}_{éch}$: courant surfacique dans la zone d'échange
 $j_{échx}, j_{échy}, j_{échz}$: courants surfaciques dans la zone d'échange thermique des
conduites sur les axes Ox,Oy,Oz
 ϕ : courant de chaleur en Watt (W)
 $\phi_{fx}, \phi_{fy}, \phi_{fz}$: courants de chaleur dans le fluide sur les axes
Ox,Oy,Oz
 $\phi_{mx}, \phi_{my}, \phi_{mz}$: courant de chaleur dans le matériau des conduites sur les
axes Ox,Oy,Oz
 $\phi_{échx}, \phi_{échy}, \phi_{échz}$: courant de chaleur dans la zone d'échange thermique sur les
axes Ox,Oy,Oz
 $d\phi_{échy}$: courant de chaleur sur l'axe Oy dans la zone d'échange
pour une longueur dx de conduite

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research

$D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$: diffusivité thermique du gaz

$\Delta T = T_B - T_A$: différence de température entre (B) et (A)

$\eta_{RGN} = 1 - \frac{\Delta T}{T_c - T_f}$: rendement thermique du régénérateur (RGN)

$F_{RGN} = \frac{\lambda_m b \ell}{c D_m e}$: facteur de régénération

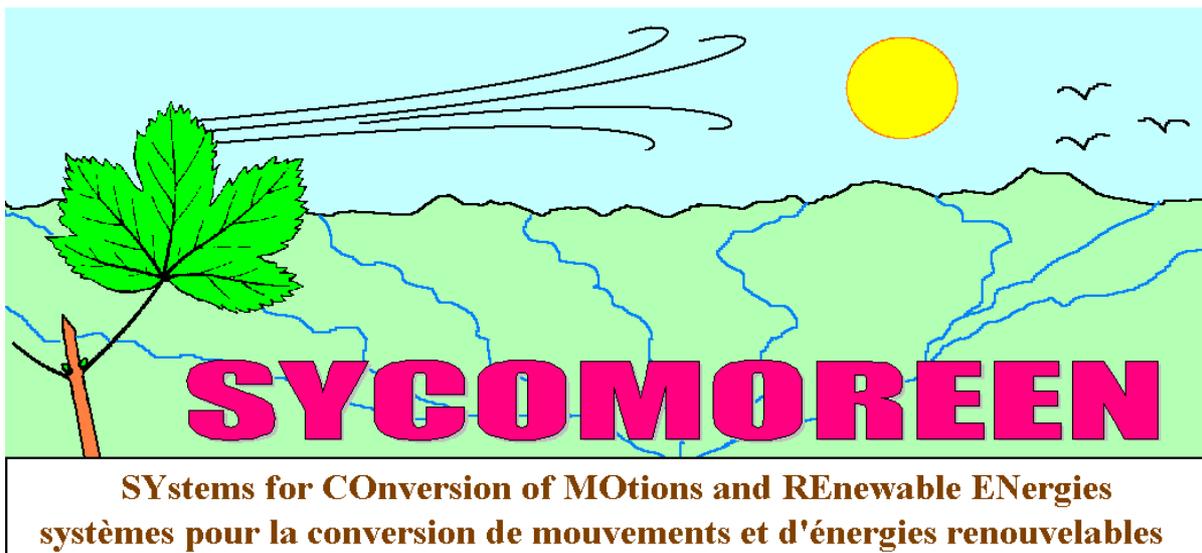
m_f : masse de gaz subissant un cycle de Stirling

w : travail produit par la masse de fluide m_f

$P_w = w n_{cycle/s}$: puissance du dispositif(1) en Watt

θ : écart à la température théorique des isothermes

$\alpha_{cor} = \frac{T_c - \theta}{T_f + \theta}$: rapport des températures corrigées



Le Mouvement Naturellement Energique !
The Naturally Energetic Movement !
Die Natürlich Energische Bewegung !
El Movimiento Naturalmente Energico !

<http://sycomoreen.free.fr>

Exclusive intellectual property of SYCOMOREEN

Authorized use only for educational or school applications and non-profit scientific research