Chapitre 11

Premières Notions sur les fonctions

1. Exemples

Exemple 1

La distance parcourue par une automobile en un temps donné varie en fonction de sa vitesse .
Faire deux phrases utilisant les mots suivants .

Varie en fonction de	Prix des roses	Nombre de roses
Varie en fonction de	Salaire horaire	Salaire mensuel

Rep 1 :………………………………………………………………………………………………….

Rep 2 :………………………………………………………………………………………………….

Exemple 2

Que doit-on placer en abscisses dans un graphique si on veut représenter:
1) La distance d parcourue en fonction du temps t .
2) Le prix p en fonction du nombre n de chemises achetées .

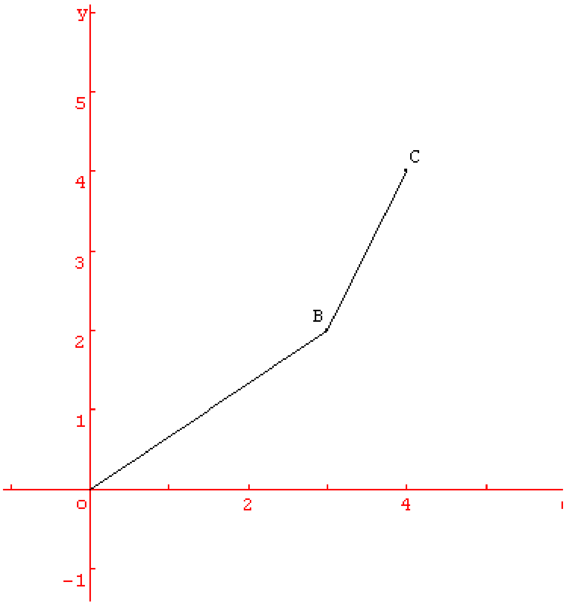
Rep 1 :………………………………………………………………………………………………….

Rep 2 :………………………………………………………………………………………………….

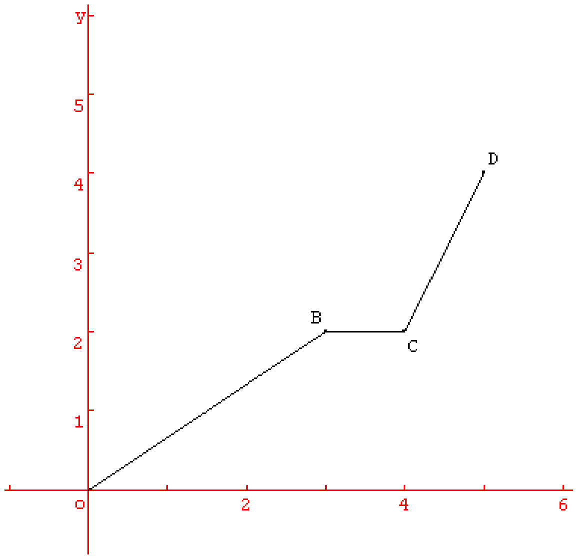
Exemple 3

1) Parmi les six graphiques suivants, indiquer celui qui correspond au récit suivant:
Un promeneur part de son domicile, marche pendant 3 heures (en s'éloignant toujours de son domicile), s'arrête pendant 1 heure et retourne chez lui en autocar .

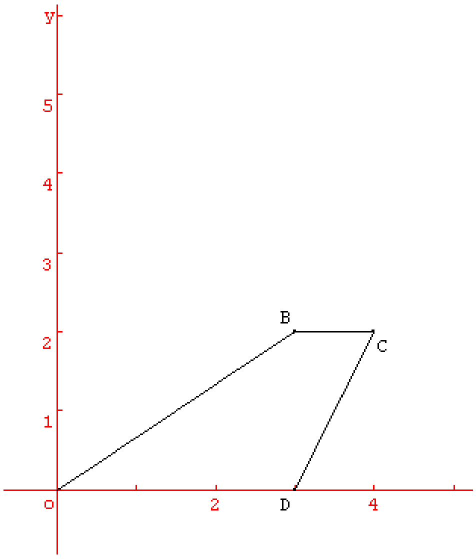
2) Donner lorsque c'est possible une interprétation des autres graphiques .


y
5
4
3
2
1
o
-1
2
4
B
C

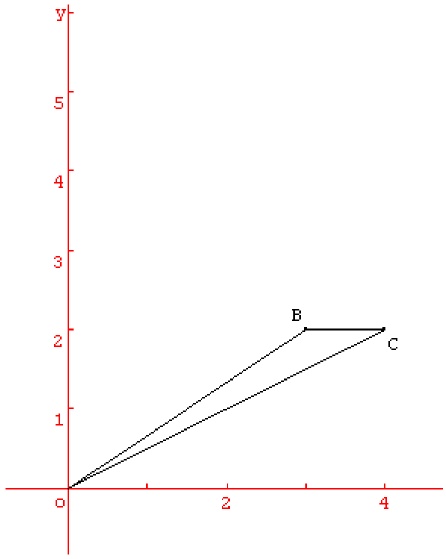
1


y
5
4
3
2
1
o
2
4
6
B
C
D

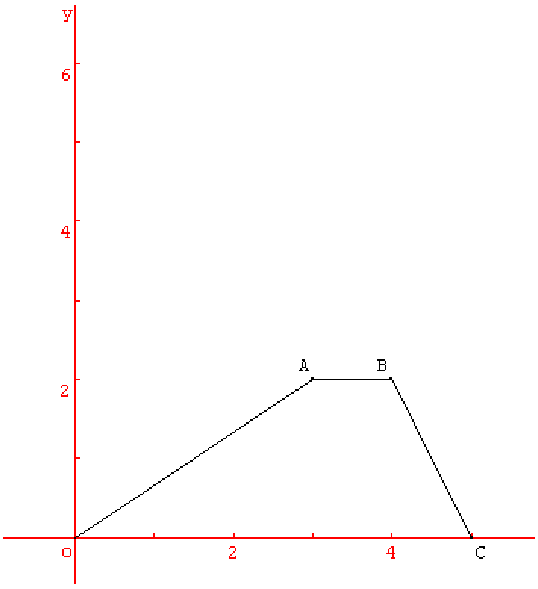
2


y
5
4
3
2
1
o
2
4
B
C
D

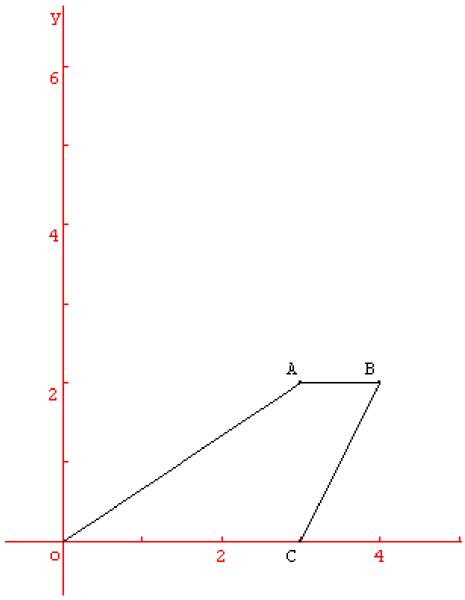
3


y
5
4
3
2
1
o
2
4
B
C

4


y
6
4
2
o
2
4
A
B
C

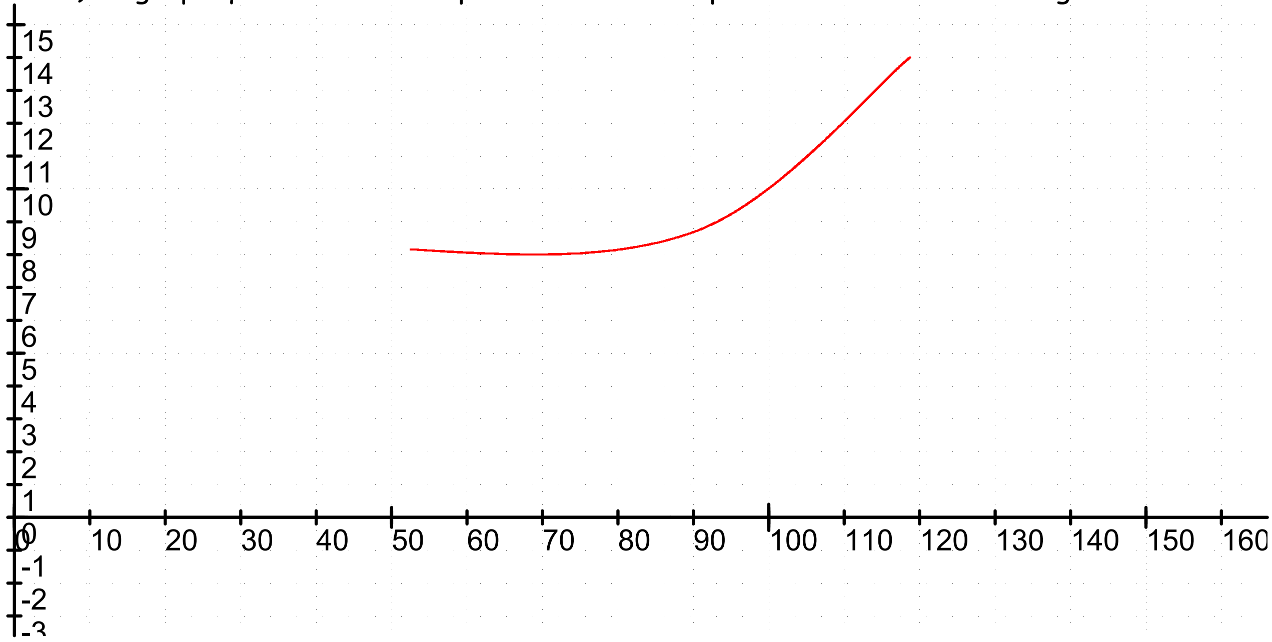
5


y
6
4
2
o
2
4
A
B
C

6

Exemple 4

La consommation en carburant d'une voiture s'exprime en litres pour 100 kilomètres (L/100 Km).Cette consommation c dépend de la vitesse moyenne v de la voiture (exprimée en Km/h).Le graphique ci-dessous représente la correspondance entre ces deux grandeurs.



1) Vérifier que sur le graphique, à chaque vitesse est associé une seule consommation.
2) En utilisant le graphique, évaluer la consommation pour une vitesse de 75 Km/h ; 125 Km/h.

Rep 2 :……………………………………………………………………………………………………

3) La consommation étant de 10 L/100 Km, estimer à quelle vitesse la voiture parcourt le trajet.

Rep 3 :……………………………………………………………………………………………………

4) La vitesse moyenne de la voiture étant comprise entre 100 et 120 Km/h, déterminer à l'aide du graphique un encadrement de la consommation de la voiture.

Rep 4 :……………………………………………………………………………………………………

5) Inversement, la consommation étant comprise entre 6 et 8 L/100 Km, déterminer un encadrement de la vitesse de la voiture.

Rep 5 :……………………………………………………………………………………………………

6) Compléter le tableau suivant

vitesse en Km/h	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
Consommation en L/100 Km												

Exemple 5

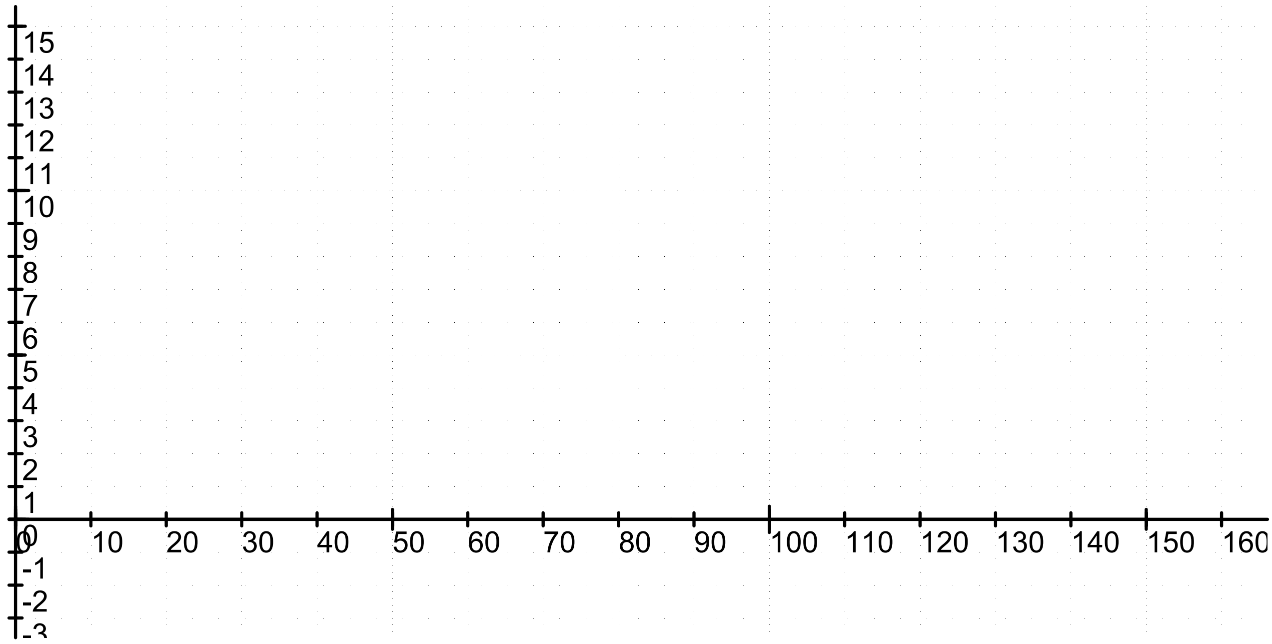
Pour une deuxième voiture, la consommation c est définie en fonction de la vitesse v de la voiture par la formule

$c = \dfrac{300v + v^2}{5000}$; on note c=g(v)

2. Dresser un tableau de valeurs de la fonction g.

vitesse en Km/h	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
Consommation en L/100 Km												

3. Construire le graphique représentant la fonction g lorsque la vitesse appartient à l'intervalle [40 ;150].



4. A partir de ce graphique reprendre les question de la première partie.

a) Vérifier que sur le graphique, à chaque vitesse est associé une seule consommation.
b) En utilisant le graphique, évaluer la consommation pour une vitesse de 75 Km/h ; 125 Km/h.

Rep b :………

c) La consommation étant de 10 L/Km, estimer à quelle vitesse la voiture parcourt le trajet.

Rep c :………

d) La vitesse moyenne de la voiture étant comprise entre 100 et 120 Km/h, déterminer à l'aide du graphique un encadrement de la consommation de la voiture.

Rep d :………

e) Inversement, la consommation étant comprise entre 6 et 8 L/100 Km, déterminer un encadrement de la vitesse de la voiture.

Rep e :………

2. Définition et Notation

A. fonction

A et B désignent 2 parties non vide de $\Re$.

On dit qu'une correspondance entre A et B est une fonction lorsque à tout élément de A, elle associe **au plus** un élément de B.
notation :

$$f : \begin{array}{l} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

on lit « f est la fonction de A vers B qui a x associe le nombre f(x) ». A est l'ensemble de départ et B est l'ensemble d'arrivée de la fonction.

Remarque :
Il est important de ne pas confondre la fonction f et le nombre f(x). la fonction f est le « procédé » pour « passer de x à f(x) ».
Dans l'écriture $x \mapsto f(x)$ *x est la variable et f(x) est le nombre image de x par la fonction f.*

f(x) est l'**image** de x par la fonction f.
Etant donné un réel y, tout réel x appartenant à D_f tel que y = f(x) est dit antécédent de y par la fonction f.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^2$
$f(2) = 2^2 = 4$. Donc 4 est l'image de 12 par f.
Et on peut aussi dire que 2 est un antécédent de 4 par f, mais ce n'est pas le seul.
En effet, on a aussi $f(-2) = (-2)^2 = 4$.
Donc –2 est aussi un antécédent de 4 par f.

$$\underset{(\text{antécédent de } 4)}{2} \overset{f(x)}{\longmapsto} \underset{(\text{image de } 2)}{4}$$

Un réel admet une seul image par une fonction, mais peut admettre plusieurs antécédents.

B. Ensemble de définition

Soit f une fonction de A vers B, l'ensemble des nombres x de A qui ont une image par f est l'ensemble de définition de la fonction f .
On le note Df et on dit que f est définie sur Df.

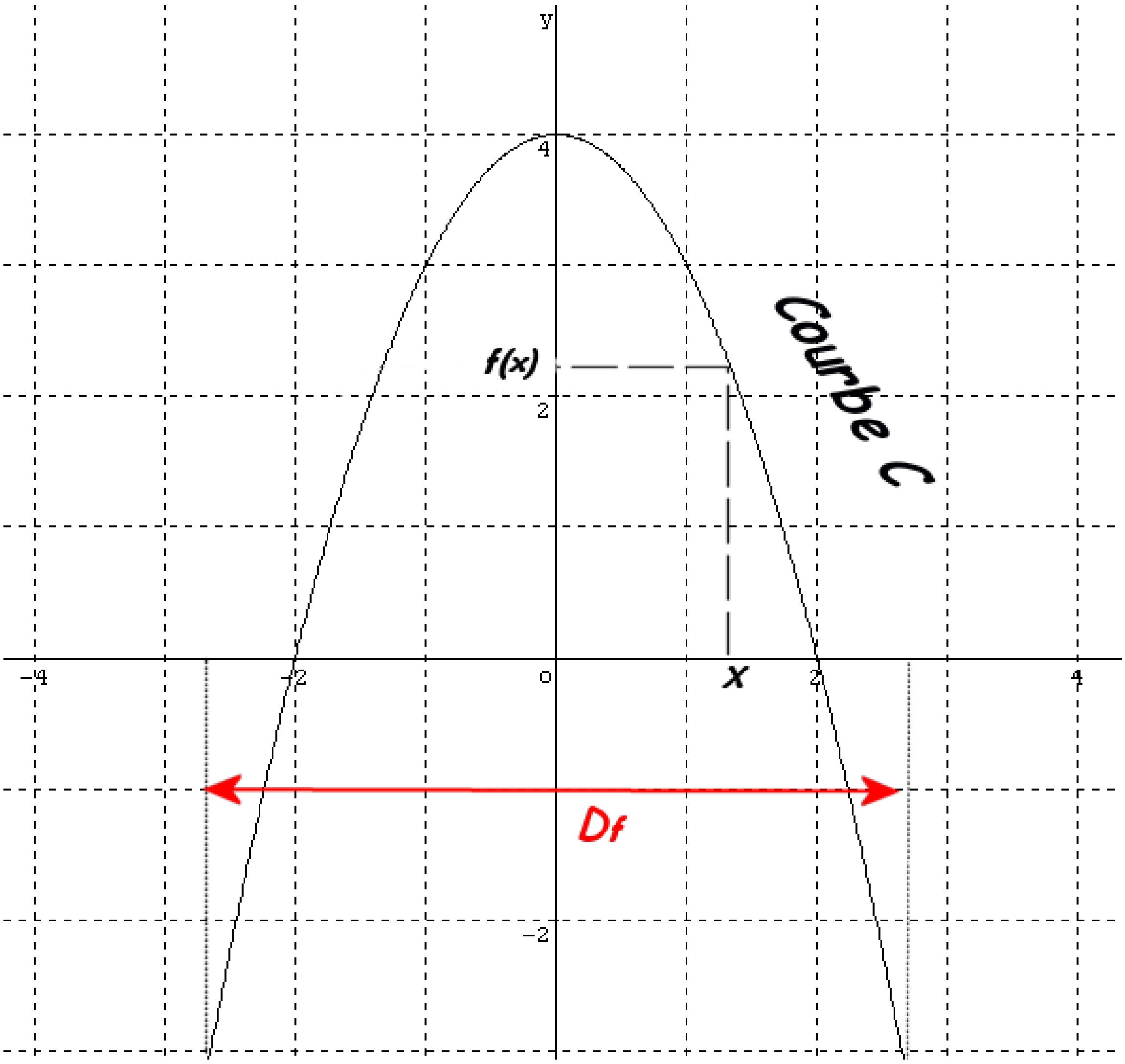
Exemples :

- ✓ $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$ Df=$\Re$ -{0} car x peut prendre toutes les valeurs sauf 0.

- ✓ $g(x) = \sqrt{x}$ Dg=[0 ;+∞[car on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif.

(voir Fiche méthode sur l'ensemble de définition d'une fonction)

3. Courbe représentative d'une fonction

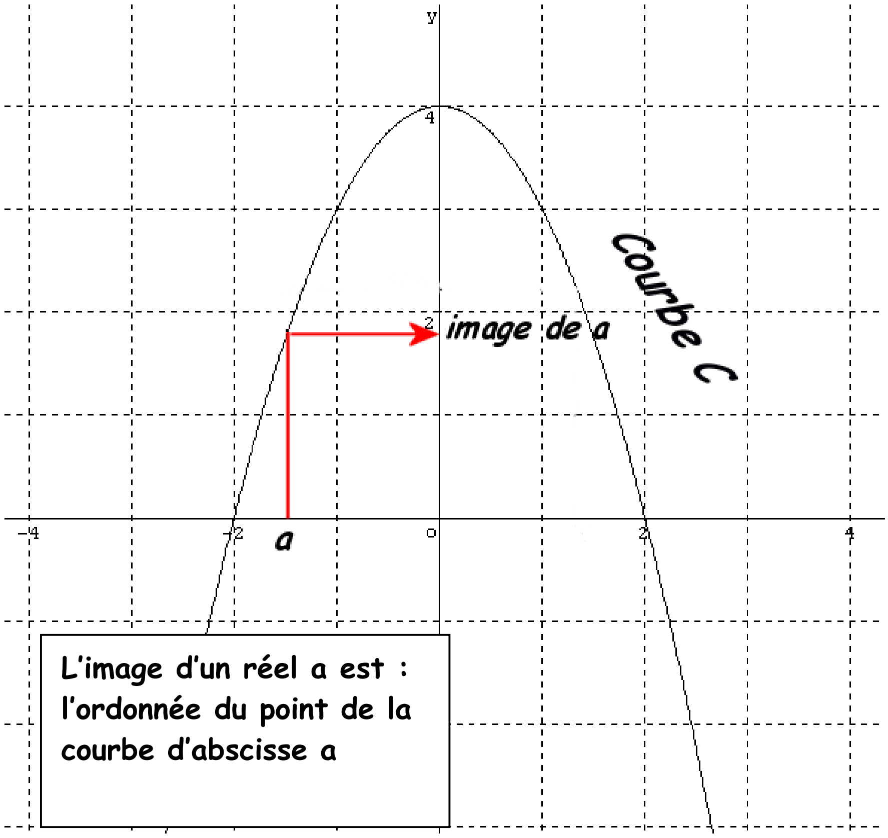


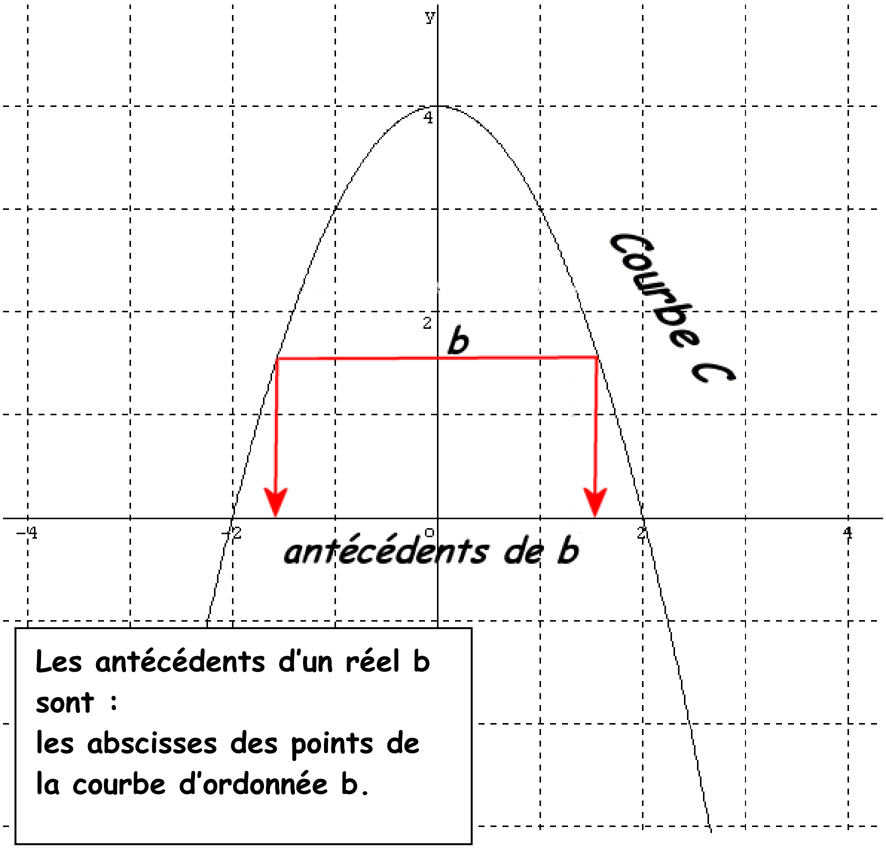
Dans un repère donné, la courbe C représentative de la fonction f
est l'ensemble des points M(x ; y) tels que :

- L'abscisse x décrit l'ensemble de définition de f.
- L'ordonnée de y est l'image de x par f, c'est à dire que y = f(x).

Remarques :
Y = f(x) est l'équation réduite de la courbe C.
Un point de la courbe d'abscisse x a nécessairement f(x) pour ordonnée.

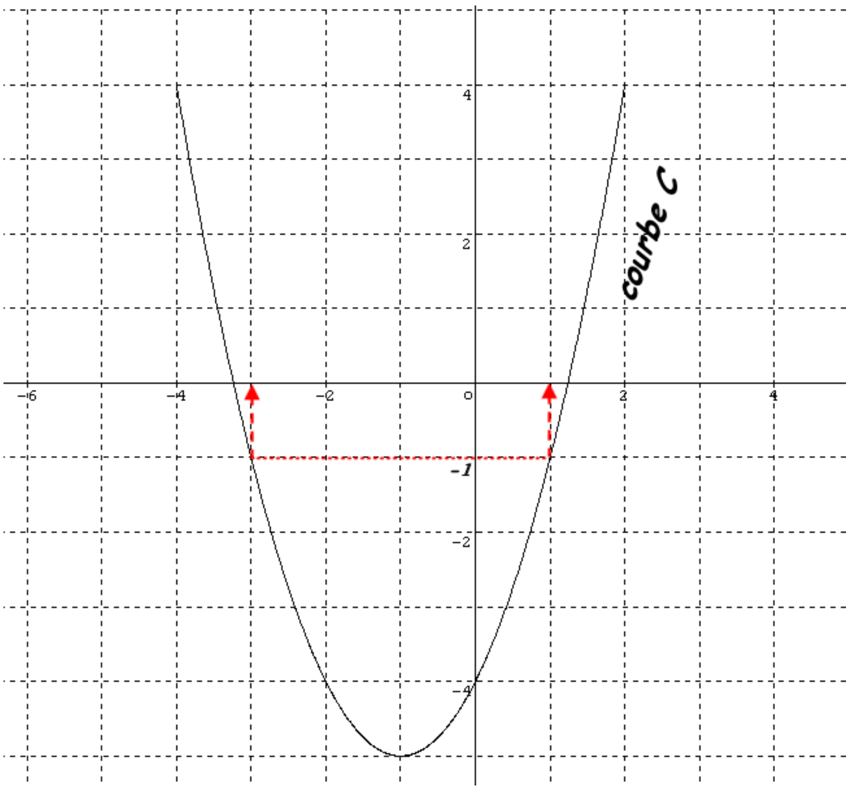
Conséquences : Lecture graphique





Exemple :

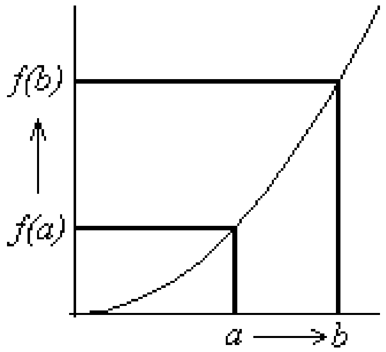
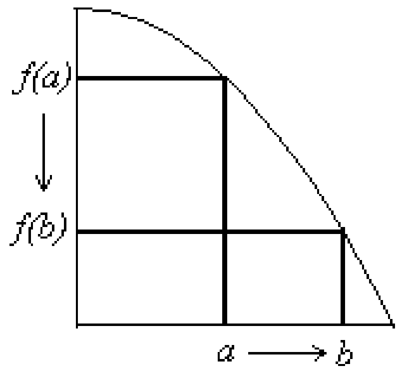
Cf est la courbe représentative d'une fonction définie sur [-4 ;2]
A(-3 ;-1) est un point de la courbe donc f(-3)=-1 (l'image de –3 est –1)
B(1 ;-1) est un point de la courbe donc f(1)=-1 (l'image de 1 est –1)
On dit que : -1 est l'image de –3 et de –1 ou –1 a pour antécédent –3 et -1



4. Variation ; Maximum et Minimum.

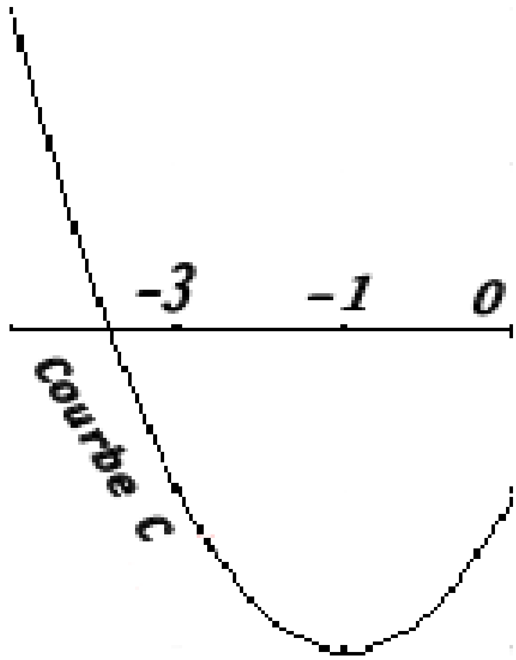
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\Re$.

A. VARIATION

Une fonction est dites **croissante** sur I si pour toutes les valeurs a et b de I tels que **a<b on a f(a)≤f(b).** *(les images et les nombres sont dans le même ordre).*	Une fonction est dites **décroissante** sur I si pour toutes les valeurs a et b de I tels que **a<b on a f(a)≥f(b).** *(les images sont dans l'ordre contraire des nombres).*
	

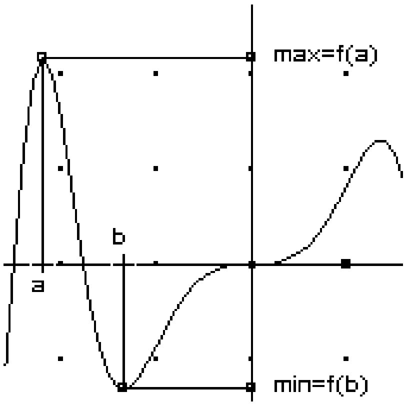
Une fonction est **monotone** sur un intervalle I si elle garde la même variation sur I.

Exemple :



f est monotone
sur [-3;-1] (décroissante) et
sur [-1;0] (croissante)

B. Maximum - Minimum

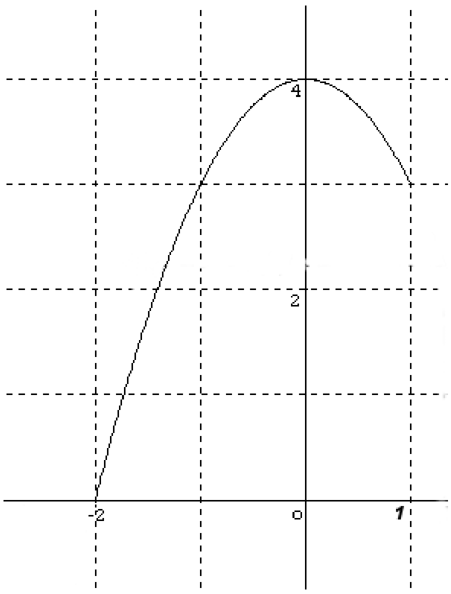


Une fonction définie sur un intervalle I admet
un maximum en a qui vaut f(a) si pour tout x de I
f(x) ≤ **f(a)** .

Une fonction définie sur un intervalle I admet
un minimum en b qui vaut f(b) si pour tout x de I
f(x) ≥ **f(b)** .

C. Tableau de variation

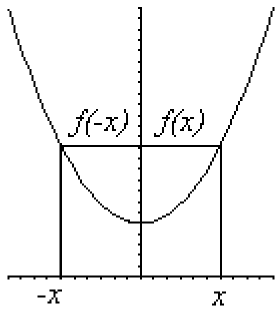
Le tableau de variation est un résumé des renseignement que nous connaissons sur la fonction ou sur sa courbe représentative.
on repère en premier l'ensemble de définition : df=[-2 ;1]
On découpe df en intervalles ou la fonction est monotone : =[-2 ;0] [0 ;1]
Si ils existent on repère le minimum et le maximum de la fonction.



On résume les renseignement dans un tableau :

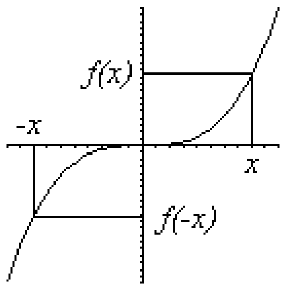
x	-2	0	1
Variation de f		4	
	-2 ↗		↘ 3

5. Fonction Paire – Fonction Impaire



Une fonction f **est paire** lorsque :
son ensemble de définition **Df est symétrique par à 0** et que, pour tout x de Df, **f(-x)=f(x)**.

La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Une fonction f **est impaire** lorsque :
son ensemble de définition **Df est symétrique par à 0** et que, pour tout x de Df, **f(-x)=-f(x)**.

La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère

Une fonction ni paire ni impaire est une fonction quelconque.

exemples :

Df=$\Re$ car x peut prendre toutes les valeurs.

$f(x) = x^2$ Df est symétrique par rapport à 0
et pour tout x de $\Re$ $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
f est paire

Df=$\Re$ car x peut prendre toutes les valeurs

$f(x) = x^3$ Df est symétrique par rapport à 0
et pour tout x de $\Re$ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
f est impaire

(voir Fiche méthode sur la parité d'une fonction)

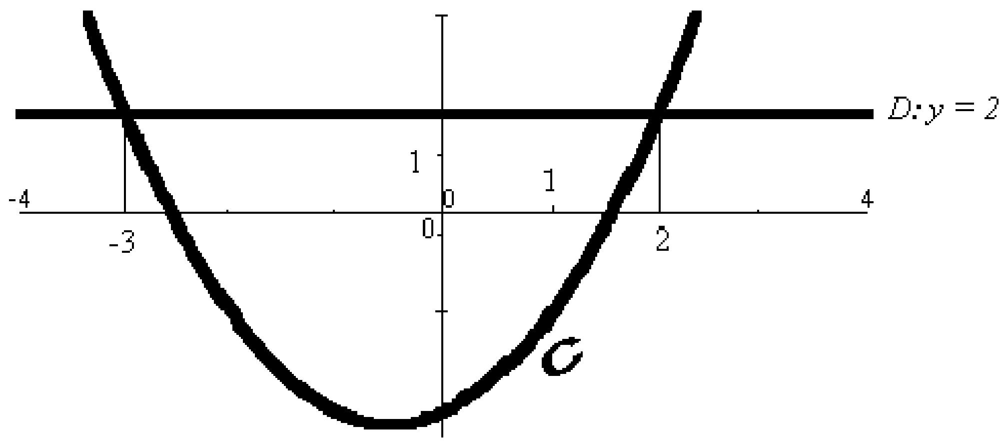
6. Résolution graphique d'équation et d'inéquation

Etant donné f une fonction , I un intervalle inclus dans son ensemble de définition, C sa courbe représentative et D la droite horizontale d'équation y=b

- Les solutions sur I de l'équation **f(x) = b** sont les abscisses des points d' intersection entre la courbe C et la droite D.
- Les solutions sur I de l'inéquation **f(x) > b** sont les abscisses des points de la courbe C situés strictement au dessus de la droite D.
- Les solutions sur I de l'inéquation **f(x) < b** sont les abscisses des points de la courbe C situés strictement en dessous de la droite D.
- Les solutions sur I de l'inéquation **f(x)** $\geq$ **b** sont les abscisses des points de la courbe C situés sur et au dessus de la droite D.
- Les solutions sur I de l'inéquation **f(x)** $\leq$ **b** sont les abscisses des points de la courbe C situés sur et en dessous de la droite D.

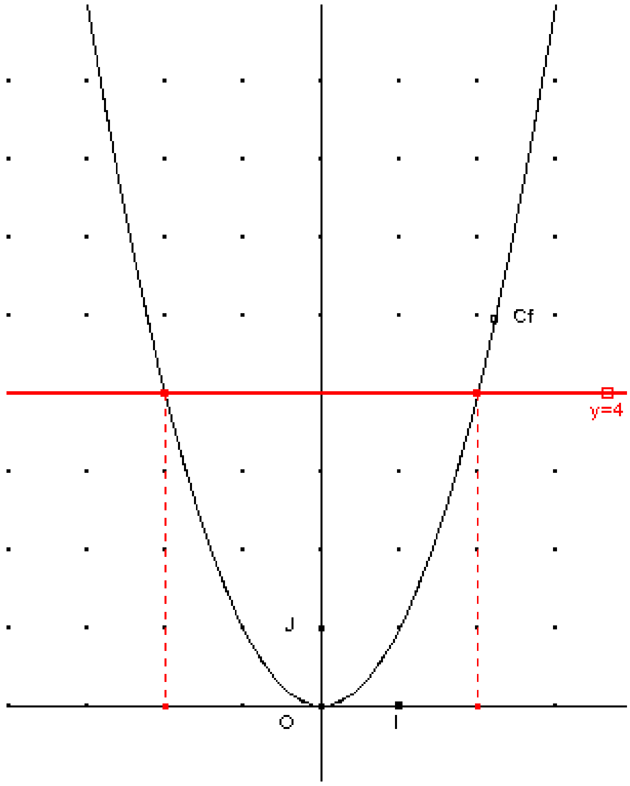
Exemples :

Exemple 1



1) Résolution graphique sur l'intervalle de [-4 ;4] de l'équation f(x)=2
   Rep : $S = \{-3; 2\}$
2) Résolution graphique sur l'intervalle de [-4 ;4] de l'inéquation f(x)$\leq$2
   Rep : $S = [-3; 2]$

Exemple 2 :



Soit la fonction f connue par sa courbe représentative Cf ci-dessus.

1) résoudre f(x) = 4.
   l'ensemble des solutions est S={-2 ;2}.

2) résoudre f(x) ≤ 4.
   l'ensemble des solutions est S=[-2 ;2] (c'est un intervalle).

3) résoudre f(x) > 4. *attention l'inégalité est stricte*
   l'ensemble des solutions est S=[-3 ;-2[∪]2 ;3] (c'est une réunion d'intervalles où –2 ;2 ne sont pas compris).